Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **VIII**, 2.

BEITRAG ZUR THEORIE DER UNVOLLSTÄNDIGEN GAMMAFUNKTIONEN

NACH HINTERLASSENEN PAPIEREN
VON J. L. W. V. JENSEN

VON

G. RASCH

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1927

1. Einleitung.

Die unvollständigen Gammafunktionen $P(z,\varrho)$ und $Q(z,\varrho)$ können definiert werden durch die Integrale

$$(1)\qquad P(z,\varrho) = \int_0^\varrho e^{-t}\, t^{z-1}\, dt, \qquad \Re z > 0$$

$$(2)\qquad Q(z,\varrho) = \int_\varrho^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt,$$

wobei ϱ nicht negativ reell ist. Der Integrationsweg soll die negative reelle Achse nicht schneiden. Die Summe der beiden Funktionen ist das zweite Eulersche Integral

$$(3)\qquad \Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt, \qquad \Re z > 0.$$

Für verschiedene Eigenschaften der beiden Funktionen, die wir im folgenden brauchen, sei verwiesen auf N. E. Nörlund, Differenzenrechnung, Berlin 1924, p. 388—406, N. Nielsen, Theorie der Gammafunktion, Leipzig 1906, p. 25—36, 209—219 und N. Nielsen, Theorie des Integrallogarithmus, Leipzig 1906.

Über die unvollständigen Gammafunktionen finden sich in Jensens nachgelassenen Papieren gewisse Untersuchungen, welche die wesentliche Grundlage der folgenden Arbeit bilden. Und zwar handelt es sich einmal um zwei Sätze über die Nullstellen der P-Funktion, die mit naheliegenden Verallgemeinerungen in § 2 mitgeteilt werden. Im nächsten Paragrafen wird der asymptotische Ausdruck für die Nullstellen der Q-Funktion hergeleitet, den Jensen 1924 der

Dänischen Gesellschaft der Wissenschaften vorlegte und übrigens schon 1893 in der Kopenhagener Mathematischen Vereinigung vorgetragen hatte. Dieser Ausdruck wird auch etwas verschärft. § 4 enthält einen von Jensen gegebenen Beweis für eine von Schlömilch herrührende Fakultätenreihendarstellung von $Q(z,\varrho)$ und § 5 die neuen Entwicklungen (53) und (54) für die unvollständigen Gammafunktionen, die auch von Jensen herrühren; für diese Entwicklungen werden einige Anwendungen gegeben.

2. Die Nullstellen der *P*-Funktion.

Gronwall[1] hat einen sehr einfachen Beweis dafür gegeben, dass die imaginären Nullstellen von $P(z) = P(z, 1)$ in der Halbebene $\Re z \leqq -\frac{3}{2}$ liegen. Seine Beweisführung kann vertieft werden, so dass man einen Satz über die Lage der imaginären Nullstellen von $P(z,\varrho)$ für $0 < \varrho \leqq 1$ erhält.

Bei $0 < \varrho \leqq 1$ liegt jede imaginäre Nullstelle von $P(z,\varrho)$ in dem Gebiete, das gemeinsam überdeckt wird von zwei Kreissystemen C_s und C_s' $(s = 0, 1, 2, \ldots)$, die auf folgende Weise definiert sind: C_s ist der Kreis mit dem Mittelpunkte

$$c_s = -2s - \frac{1}{1 - \frac{\varrho}{2s+1}} \tag{4}$$

und dem Radius

$$\varrho_s = \frac{\sqrt{\frac{\varrho}{2s+1}}}{1 - \frac{\varrho}{2s+1}}, \tag{5}$$

während C_s' den Mittelpunkt $c_s' = c_s - 1$ und den Radius ϱ_s hat.

[1] Ann. Éc. Norm. (3) 33 (1916), p. 381—393.

Beweis: Aus der Partialbruchreihe

$$(6) \qquad P(z,\varrho) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \cdot \frac{\varrho^{z+s}}{z+s}$$

gewinnt man mit $z = x + iy$

$$(7) \quad \begin{cases} -\frac{1}{y}\Im\left(\varrho^{-z} P(z,\varrho)\right) = \displaystyle\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \cdot \frac{\varrho^s}{|z+s|^2} \\ \qquad = \displaystyle\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\varrho^{2s}}{(2s)!} \cdot \left[\frac{1}{|z+2s|^2} - \frac{\varrho}{(2s+1)\,|z+2s+1|^2}\right]. \end{cases}$$

Die rechte Seite ist offenbar positiv, wofern

$$|z+2s+1|^2 \geqq \frac{\varrho}{2s+1} |z+2s|^2$$

für $s = 0, 1, 2, \ldots$ D. h.: $P(z, \varrho) \neq 0$, wenn z ausserhalb aller Kreise C_s oder auf einem von ihnen liegt.

Mit Benützung der Differenzengleichung

$$(8) \qquad P(z+1, \varrho) = z\,P(z,\varrho) - e^{-\varrho}\varrho^z$$

folgt

$$(9) \qquad \Im\left(z\varrho^{-z} P(z,\varrho)\right) = \Im\left(\varrho^{-z} P(z+1,\varrho)\right),$$

und hieraus ersieht man, dass $P(z, \varrho)$ auch $\neq 0$, wenn $z+1$ ausserhalb der Kreise C_s liegt. Hiermit ist der Satz bewiesen.

Für grosse s stellt C_s einen sehr kleinen Kreis um $-2s-1$ dar, während C'_s ein sehr kleiner Kreis um $-2s-2$ ist. Hieraus geht hervor, dass das beiden Kreissystemen C_s und C'_s gemeinsame Gebiet in einer endlichen Anzahl dieser Kreise enthalten sein muss. Wir wollen demgemäss zeigen, dass die imaginären Nullstellen innerhalb der Kreise C_0, C_1, C_2, C_3 und C'_0, C'_1, C'_2 liegen. Zunächst merken wir an, dass die Mittelpunkte c_1, c'_1, c_2, c'_2, ... eine monotone Folge bilden. Man hat ja immer $c_s > c'_s$; die Ungleichheit $c'_s > c_s + 1$ kann umgeschrieben werden zu

$$1 - \frac{2\varrho}{2s+1} + \frac{\varrho^2}{(2s+1)(2s+3)} > 0,$$

und man sieht sogleich ein, dass sie bei $s \geqq 1$ für alle positiven $\varrho \leqq 1$ erfüllt ist. Weiter wollen wir beweisen, dass die Kreise C_3, C'_3, C_4, C'_4, ... ganz getrennt liegen. Die Schnittpunkte zwischen dem Kreise C_s und der negativen reellen Achse befinden sich in

$$c_s \pm \varrho_s = -2s - \frac{1}{1 \pm \sqrt{\frac{\varrho}{2s+1}}}, \tag{10}$$

während für C'_s die entsprechenden Punkte $c_s - 1 \pm \varrho_s$ sind. Die Bedingung dafür, dass C_s ganz ausserhalb C'_s liegt, lautet

$$\varrho_s < \frac{1}{2}.$$

Diese Ungleichheit ist identisch mit

$$2s + 1 > \varrho\left(3 + 3\sqrt{8}\right) = 5{,}83\,\varrho,$$

was bei $s \geqq 3$ offenbar für alle positiven $\varrho \leqq 1$ zutrifft. Die Bedingung dafür, dass C'_s keinen Punkt mit C_{s+1} gemein hat, heisst

$$c'_s - \varrho_s > c_{s+1} + \varrho_{s+1}$$

und kann mit Hilfe von (10) umgeschrieben werden zu

$$1 - 2\sqrt{\frac{\varrho}{2s+1}} - \frac{\varrho}{\sqrt{(2s+1)(2s+3)}} > 0.$$

Eine einfache Rechnung lehrt, dass auch diese Ungleichheit bei $s \geqq 3$ für alle positiven $\varrho \leqq 1$ stattfindet.

Das soeben Bewiesene schliesst natürlich nicht aus, dass z. B. C'_0 einen oder mehrere der Kreise C_s und C'_s mit $s \geqq 3$ umfasst. Für $\varrho = 1$ ist C'_0 sogar die ganze Halbebene $\Re z \leqq -\frac{3}{2}$ und enthält demnach alle diese Kreise.

Der Beweis kann nicht ohne weiteres auf den Fall $\varrho > 1$ übertragen werden; jedoch kann man mit Hilfe der Fakultätenreihe

$$P(z,\varrho) = e^{-\varrho}\varrho^z \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\varrho^s}{z(z+1)\cdots(z+s)} \tag{11}$$

den folgenden Satz erhalten, der für alle (auch komplexen) ϱ gilt, aber für positives $\varrho \leqq 1$ nicht so weit geht wie der eben bewiesene.

$P(z,\varrho)$ hat keine Nullstellen in dem ausserhalb des Kreises $|z+1| = 2|\varrho|$ gelegenen Teile der Halbebene $\Re z \geqq -\frac{3}{2}$.

Beweis: In der betrachteten Halbebene ist

$$|z+s+1| \geqq |z+1|$$

für alle positiven ganzen s. Aus (11) bekommt man daher

$$|z e^{\varrho} \varrho^{-z} P(z,\varrho) - 1| < \sum_{s=1}^{\infty} \left|\frac{\varrho}{s+1}\right|^s = \frac{|\varrho|}{|z+1| - |\varrho|},$$

wofern $|z+1| > |\varrho|$. Befindet sich z sogar ausserhalb des Kreises $|z+1| > 2|\varrho|$, so fällt

$$1 > \frac{|\varrho|}{|z+1| - |\varrho|},$$

also $P(z,\varrho) \neq 0$ aus.

3. Die Nullstellen der Q-Funktion.

Nach Lindhagen und Nielsen[1] liegen die Nullstellen der ganzen Funktion $Q(z,\varrho)$ bei $\varrho \geqq 0$ in der Halbebene $\Re z > \varrho$. Stieltjes[2] bewies in schöner Anwendung des Picardschen Satzes über ganze Funktionen, dass $Q(z,\varrho)$ wirklich unendlich viele Nullstellen hat. Dies folgt übrigens auch aus den Anfangsgründen der Hadamardschen Theorie, weil $Q(z,\varrho)$ offenbar eine ganze Funktion vom Geschlecht 1 ist, die nicht von der Form $p(z)e^{kz}$ mit ganzem rationalem $p(z)$ und konstantem k sein kann; denn wäre sie es, so könnte sie nicht längs der positiven reellen Achse dieselbe Grössenordnung wie $\Gamma(z)$ besitzen.

Aus der Integraldarstellung (2) für $Q(z,\varrho)$ entnimmt man weiterhin $Q(z,\varrho) > 0$ für reelles z, sodass alle Nullstellen imaginär ausfallen. Wir wollen ihre asymptotische Lage bestimmen. Die Gleichung

$$Q(z,\varrho) = 0 \tag{12}$$

ist identisch mit

$$\Gamma(z) = P(z,\varrho), \tag{12a}$$

so dass die Nullstellen die Schnittpunkte zwischen der Kurve γ

$$\log|\Gamma(z)| = \log|P(z,\varrho)| \tag{13}$$

und den Kurven α_n

$$\operatorname{arc}\Gamma(z) = \operatorname{arc}P(z,\varrho) + 2n\pi \tag{14}$$

sind, wobei n alle positiven und negativen ganzen Zahlen einschliesslich 0 durchläuft. In der Halbebene $\Re z > 0$ ist $\operatorname{arc}\Gamma(z)$ eindeutig bestimmt als stetige Fortsetzung von

[1] Vgl. z. B. N. Nielsen, Gammafunktion, p. 211—212.

[2] Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, Paris 1905, lettre no. 219.

arc $\Gamma(z) = 0$ für positives z. Um arc $P(z,\varrho)$ festzulegen, müssen wir einen Schnitt führen, der z am Umlaufen einer Nullstelle von $P(z,\varrho)$ verhindert; nach dem Schlusse von § 2 können wir als solchen Schnitt den Kreis $|z+1| = 2\varrho$ wählen.

Zunächst soll gezeigt werden, dass α_n bei hinreichend grossem $|n|$ die Kurve γ ein- und nur einmal schneidet. γ besteht aus zwei Zweigen, die zur positiven reellen Achse symmetrisch liegen, und α_n ist in bezug auf diese symmetrisch zu α_{-n}. Wie aus dem folgenden hervorgehen wird, befindet sich α_n für genügend grosse $n > 0$ ganz oberhalb der positiven reellen Achse, und es genügt deshalb, den Fall $n > 0$, $\Im z \geqq 0$ zu betrachten.

Wird

$$(15) \qquad \omega(z) = \log \Gamma(z) - \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z - z - \log \sqrt{2\pi}$$

und

$$(16) \qquad \omega(z,\varrho) = \log\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\varrho^s}{(z+1)\cdots(z+s)}\right)$$

sowie $z = x + iy$ gesetzt, so kann die Gleichung (13) auch

$$(17) \left\{ \begin{aligned} &\left(x+\frac{1}{2}\right) \log|z| - y \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - x \log \varrho e + \varrho + \log\sqrt{2\pi} \\ &\qquad = \Re\big(\omega(z,\varrho) - \omega(z)\big) = O\left(\frac{1}{z}\right) \end{aligned} \right.$$

geschrieben werden. Wenn z in der Halbebene $\Re z > 0$ gegen Unendlich geht und (17) befriedigen soll, so kann x offenbar nicht beschränkt bleiben. Dividiert man die Gleichung durch x, so erhält man

$$\left(1 + \frac{1}{2x}\right) \log|z| - \frac{y}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = O(1)$$

und sieht hieraus, dass auch

$$\frac{y}{x} \to \infty. \tag{18}$$

Die Tangentenrichtung in einem Punkte z auf γ ist bestimmt durch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log|z| + \frac{y}{2|z|^2} - \log\varrho + \Re\left(\omega'(z) - \omega'(z,\varrho)\right)}{\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{y}{2|z|^2} + \Im\left(\omega'(z) - \omega'(z,\varrho)\right)}; \tag{19}$$

da $\omega'(z)$ und $\omega'(z,\varrho)$ für $z \to \infty$ nach 0 streben, wird auf Grund von (18)

$$\frac{dy}{dx} \simeq \frac{2}{\pi}\log|z| \qquad \text{für } |z| \to \infty. \tag{19a}$$

Hieraus folgt, dass die Kurve γ für grosse $|z|$ monoton wächst.

Jetzt gehen wir an die Untersuchung der Kurven α_n. Nach (15) und (16) können ihre Gleichungen in der Gestalt

$$\left\{\begin{aligned} &\left(x+\frac{1}{2}\right)\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + y\log|z| - y\log\varrho e \\ &= 2n\pi + \Im\left(\omega(z,\varrho) - \omega(z)\right) = 2n\pi + O\left(\frac{1}{z}\right) \end{aligned}\right. \tag{20}$$

geschrieben werden. Es ist unmittelbar zu sehen, dass für jedes feste n die positive Achse eine Asymptote für α_n bildet; im entgegengesetzten Falle würde nämlich $y\log|z|$ für grosse $|z|$ das überwiegende Glied in der Gleichung (20) werden, die deshalb nicht erfüllt sein könnte.

In einem gegebenen Punkte z auf α_n ist die Tangente bestimmt durch

$$(21)\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \dfrac{y}{2|z|^2} + \Im\big(\omega'(z) - \omega'(z,\varrho)\big)}{\log|z| + \dfrac{y}{2|z|^2} - \log\varrho + \Re\big(\omega'(z) - \omega'(z,\varrho)\big)} \\ \qquad \underline{\underline{\sim}} - \dfrac{\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}}{\log|z|}, \end{cases}$$

woraus hervorgeht, dass α_n für grosse $|z|$ monoton fällt. Für $n \to \infty$ rückt der Punkt auf der Kurve α_n, der dem Nullpunkte am nächsten liegt, ins Unendliche; dies hat zur Folge, dass für hinreichend grosse n jede Kurve α_n monoton fällt. Ausserdem schneidet sie die imaginäre Achse; denn für $x = 0$ gewinnt man aus (20)

$$y \log y - y \log \varrho e \;-2 n \pi \;-\Im\big(\omega(iy,\varrho) - \omega(iy)\big) = 0,$$

worin die linke Seite für grosse y offenbar positiv ist und für $y = 0$ und hinreichend grosses n negativ.

Die gefundenen Eigenschaften für die Kurven γ und α_n lehren, dass α_n bei hinreichend grossem n die Kurve γ in genau einem Punkte schneidet. Nur eine endliche Anzahl Kurven α_n schneiden γ möglicherweise nicht oder in mehreren Punkten. Es sei m die kleinste positive ganze Zahl derart, dass α_n die Kurve γ für jedes $n \geqq m$ in genau einem Punkte schneidet, dann hat man für die n-te Nullstelle (gerechnet in der Lage auf γ)

$$(22) \qquad \log \Gamma(z) = \log P(z,\varrho) + 2(n+p)\,\pi i \quad (n \geqq m);$$

p ist eine gewisse von n unabhängige ganze Zahl. $\log \Gamma(z)$ und $\log P(z,\varrho)$ sind in Übereinstimmung mit den obigen Definitionen von $\operatorname{arc} \Gamma(z)$ und $\operatorname{arc} P(z,\varrho)$ gewählt.

Um jetzt die asymptotische Lage der n-ten Nullstelle z_n zu bestimmen, schreiben wir (22) in der Form

$$(23)\begin{cases} \left(z_n+\frac{1}{2}\right)\log z_n - z_n \log \varrho e \\ = 2n\pi i + 2p\pi i - \varrho - \log\sqrt{2\pi} - \omega(z_n) + \omega(z_n, \varrho) \\ = 2n\pi i + O(1). \end{cases}$$

In erster Annäherung ist

$$(24)\qquad z_n \log z_n = 2n\pi i + O(z).$$

Man sieht unmittelbar $\frac{z}{n} \to 0$ für $n \to \infty$; daraus folgt

$$(25)\quad \log z_n + \log_2 z_n = \log(2n\pi i) + O\left(\frac{z_n}{n}\right) = \log(2n\pi i) + o(1)$$

und weiter

$$(26)\begin{cases} \log_2 z_n = \log_2(2n\pi i) + O\left(\frac{\log_2 z_n}{\log(2n\pi i)}\right) \\ = \log_2(2n\pi i) + o(1). \end{cases}$$

Wird dies in (25) eingesetzt, so erhält man

$$(27)\qquad \log z_n = \log(2n\pi i) - \log_2(2n\pi i) + o(1),$$

was auch

$$(28)\qquad z_n = \frac{2n\pi i}{\log(2n\pi i)}\left(1+o(1)\right)$$

geschrieben werden kann. Dieses Ergebnis kann sogleich etwas verschärft werden; trägt man es nämlich in (25) und (26) ein, so findet man anstelle von (27)

$$(27\,\mathrm{a})\quad \log z_n = \log(2n\pi i) - \log_2(2n\pi i) + O\left(\frac{\log_2 n}{\log n}\right)$$

und daraus

$$(28\,\mathrm{a})\qquad z_n = \frac{2n\pi i}{\log(2n\pi i)}\left(1+O\left(\frac{\log_2 n}{\log n}\right)\right).$$

Unter Berücksichtigung von $\log(2n\pi i) = \log(2n\pi) + \frac{\pi i}{2}$ bekommt man durch Trennung von Reellem und Imaginärem auf der rechten Seite von (28 a)

$$z_n = \frac{\pi^2 n}{\log^2 n}(1+\varepsilon) + \frac{2n\pi i}{\log n}(1+\varepsilon'), \tag{29}$$

worin ε und ε' beide $O\left(\frac{\log_2 n}{\log n}\right)$ sind. Diese Formel — bis auf die Grössenordnung von ε und ε' — ist es gerade, die Jensen 1893 in der Kopenhagener Mathematischen Vereinigung und 1924 in der Dänischen Gesellschaft der Wissenschaften mitteilte.

Es ist nicht schwer einen beträchtlich genaueren asymptotischen Ausdruck für den Nullstellen anzugeben. Aus (27) geht hervor, dass (23) geschrieben werden kann

$$(30)\left\{\begin{aligned} z_n \log\frac{z_n}{\varrho e} &= 2n\pi i - \frac{1}{2}\log\frac{2n\pi i}{\log(2n\pi i)} + O(1) \\ &= 2n\pi i - \frac{1}{2}\log\frac{n}{\log n} + O(1). \end{aligned}\right.$$

Wird

$$\zeta_n = \frac{z_n}{\varrho e},\ \xi_n = \frac{2n\pi i}{\varrho e} - \frac{1}{2\varrho e}\log\frac{n}{\log n} \tag{31}$$

gesetzt, so nimmt (30) die Gestalt

$$\zeta_n \log\zeta_n = \xi_n + O(1) \tag{30 a}$$

an. Wir führen nun eine Funktion $\lambda(z)$ ein, die durch die Funktionalgleichung

$$\lambda(z)\log\lambda(z) = z \tag{32}$$

definiert ist. Da $\lambda(z) \neq 0$ ausser für $z = 0$, hat $\lambda(z)$ dieselben Singularitäten wie die Funktion $\log\lambda(z)$, die in dieser Hinsicht von Painlevé[1] genau untersucht worden ist. Indem man Einzelheiten und Beweise aus seiner Arbeit entnehmen möge, soll hier nur das erwähnt werden, was wir im folgendem brauchen. $\lambda(z)$ ist eine unendlich viel-

[1] P. Boutroux, Équations différentielles du premier ordre, Note de P. Painlevé. Paris 1908, pp. 143—145, 157—158.

deutige Funktion; sie hat einen Zweig, der sich im Nullpunkte regulär verhält und dort den Wert 1 hat, während alle anderen Zweige daselbst einen Verzweigungspunkt unendlich hoher Ordnung aufweisen und den Wert 0 annehmen. Jeder Zweig hat einen Verzweigungspunkt zweiter Ordnung in $-\frac{1}{e}\cdot$ Durch Zerschneidung der Ebene längs der negativen reellen Achse werden also alle Zweige eindeutig gemacht.

Wir betrachten jetzt in (22) n als eine stetige Veränderliche, welche die positive Achse durchläuft. Dann sind z_n und damit auch ζ_n für hinreichend grosses n reguläre Funktionen von n. Die Untersuchung der Kurven γ und α_n ändert sich nämlich nicht wesentlich, wenn man n auch komplexe Werte gibt, wofern diese nur hinreichend nahe an der positiven rellen Achse liegen. Hieraus folgt, dass z_n eindeutig ist und daher keine algebraischen Singularitäten haben kann; unendlich kann die Funktion auch nicht werden, da α_n die Kurven γ immer in einem im Endlichem gelegenen Punkte schneidet.

Nach (30 a) entspricht jedem n ein gewisser Zweig von $\lambda(z)$ mit

$$\zeta_n = \lambda\left(\xi_n + O(1)\right); \tag{33}$$

da aber ζ_n regulär ist und $\xi_n + O(1)$ keinen singulären Punkt von $\lambda(z)$ umkreisen kann, wenn n hinreichend gross ist, so ist dieser Zweig von $\lambda(z)$ für alle hinreichend grossen n derselbe.

Indem $\lambda(z)$ von jetzt an diesen wohlbestimmten Zweig der mehrdeutigen Funktion bedeutet, wollen wir den Ausdruck auf der rechten Seite in (33) vereinfachen.

Nach dem Mittelwertsatze von Darboux ist

$$(34)\begin{cases} \lambda(z+x) = \lambda(z) + x\lambda'(z) + \dfrac{\eta}{2} x^2 \lambda''(z+\vartheta x), \\ |\eta| \leqq 1,\ 0 \leqq \vartheta \leqq 1. \end{cases}$$

Aus der Funktionalgleichung rechnet man

$$(35) \qquad \lambda'(z) = \frac{1}{\log \lambda(z) + 1}$$

und

$$(36) \quad \lambda''(z) = -\frac{\lambda'(z)}{\lambda(z)} \cdot \frac{1}{(\log \lambda(z) + 1)^2} = \frac{-1}{\lambda(z)\,(\log \lambda(z) + 1)^3}$$

aus. Denkt man an die Herleitung von (27), so überzeugt man sich leicht, dass diese Formel in Wirklichkeit

$$(37) \qquad \log \lambda(z) = \log z - \log_2 z + o(1)$$

aussagt, während (28) auch als

$$(38) \qquad \lambda(z) = \frac{z}{\log z}\bigl(1 + o(1)\bigr)$$

gefasst werden kann. Folglich ist

$$\lambda'(z) = \frac{1}{\log \dfrac{z}{\log z}} + O\left(\frac{1}{\log^2 z}\right)$$

und

$$\lambda''(z) = \frac{-1}{z \log^4 z}\bigl(1 + o(1)\bigr).$$

Nehmen wir in (34)

$$(39) \qquad z = \frac{2 n \pi i}{\varrho e},\ x = -\frac{1}{2 \varrho e} \log \frac{n}{\log n} + O(1),$$

so ergibt sich also

$$\zeta_n = \lambda\bigl(\xi_n + O(1)\bigr) = \lambda\left(\frac{2 n \pi i}{\varrho e}\right) - \frac{1}{2 \varrho e} + O\left(\frac{1}{\log n}\right),$$

d. h.

$$(40) \qquad z_n = \varrho e \lambda\left(\frac{2 n \pi i}{\varrho e}\right) - \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{\log n}\right).$$

Hiermit ist die n-te Nullstelle von $Q(z,\varrho)$ bis auf eine für $n \to \infty$ nullstrebige Grösse bestimmt, während sie in (29) nur bis auf ein Restglied festgelegt ist, das wie $\frac{n \log_2 n}{\log^2 n}$ gegen Unendlich konvergiert. Andererseit tritt jedoch in (40) die nicht ganz elementare Funktion $\lambda(z)$ auf.

In (38) steht, wie sich $\lambda(z)$ in erster Annäherung für grosse z verhält; dies kann nach (28 a) ersetzt werden durch

$$\lambda(z) = \frac{z}{\log z}\left(1 + O\left(\frac{\log_2 z}{\log z}\right)\right), \tag{41}$$

woraus man erhält

$$\left\{\begin{aligned} \log \lambda(z) &= \log \frac{z}{\log z} + O\left(\frac{\log_2 z}{\log z}\right) \\ &= \log \frac{z}{\log z}\left(1 + O\left(\frac{\log^2 z}{\log_2 z}\right)\right). \end{aligned}\right. \tag{42}$$

Wird dies in die Funktionalgleichung (32) eingetragen, so entsteht

$$\lambda(z) = \frac{z}{\log \frac{z}{\log z}}\left(1 + O\left(\frac{\log_2 z}{\log^2 z}\right)\right). \tag{43}$$

Hieraus kann man für $\log \lambda(z)$ einen schärferen Ausdruck als (43) gewinnen, diesen dann in (32) einsetzen u. s. w. Schreiben wir

$$\left\{\begin{aligned} &\lambda_1(z) = \frac{z}{\log z}, \quad \lambda_2(z) = \frac{z}{\log \frac{z}{\log z}} = \frac{z}{\log \lambda_1(z)}, \ldots \\ &\qquad\qquad \lambda_{n+1}(z) = \frac{z}{\log \lambda_n(z)}, \ldots, \end{aligned}\right. \tag{44}$$

so findet man durch Induktion leicht die allgemeine Formel

$$\lambda(z) = \lambda_\nu(z)\left(1 + O\left(\frac{\log_2 z}{\log^\nu z}\right)\right). \tag{45}$$

Durch Einsetzen dieses Ausdruckes in (40) erkennen wir, dass auch dann, wenn man sich an elementare Funktionen halten will, (40) mehr als (28 a) liefert.

4. Die Fakultätenreihe von Schlömilch für $Q(z, \varrho)$.

Aus der von Schlömilch[1] gegebenen Integraldarstellung

$$(46) \quad Q(1-z,\varrho) = \frac{e^{-\varrho}\varrho^{1-z}}{\Gamma(z)}\int_0^\infty \frac{e^{-t}t^{z-1}}{\varrho+t}\,dt, \qquad \Re z > 0,$$

in der für ϱ lediglich negative reelle Werte ausgeschlossen sind, findet man auf bekannte Weise

$$(47) \quad \Gamma(z)e^{\varrho}\varrho^{z-1}Q(1-z,\varrho) = \sum_{\nu=0}^{n}\frac{c_\nu}{\varrho(\varrho+1)\cdots(\varrho+\nu)} + R_n$$

mit

$$(48) \qquad c_\nu = (-1)^\nu\int_0^\infty e^{-t}t^z(t-1)\cdots(t-\nu+1)\,dt$$

und

$$(49) \qquad R_n = \frac{(-1)^{n+1}n!}{\varrho(\varrho+1)\cdots(\varrho+n)}\int_0^\infty \frac{e^{-t}t^z}{\varrho+t}\binom{t-1}{n}dt.$$

Bei $n \to \infty$ strebt R_n nach 0 für $\Re z > 0$, $\Re\varrho > 0$, und man erhält damit die von Schlömilch in seinem Kompendium der höheren Analysis II, 2. Aufl., p. 263—265 mit unvollständigem Beweis gegebene Fakultätenreihe; später haben andere und auch er selbst befriedigende Beweise gegeben, aber keiner von diesen ist so einfach wie der folgende.

Aus der Cauchyschen Ungleichung für die Koeffizienten einer Potenzreihe folgt für $t \geqq 1$

$$\left|\binom{t-1}{n}\right| \leqq \frac{(1+r)^{t-1}}{r^n},$$

[1] Vgl. z. B. Komp. d. höheren Analysis II, 2. Aufl., Braunschweig 1866, p. 263.

wenn r zwischen 0 und 1 liegt; bei $r \to 1$ bekommt man

$$\left|\binom{t-1}{n}\right| \leqq 2^{t-1} < 2^t. \tag{50}$$

Für $0 \leqq t \leqq 1$ gilt offenbar

$$(-1)^n \binom{t-1}{n} = \left(1-\frac{t}{1}\right)\left(1-\frac{t}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{t}{n}\right) \leqq 1 \leqq 2^t.$$

Mit $\Re z = x$ besteht also folgende Ungleichung

$$|R_n| \leqq \left|\frac{\Gamma(\varrho)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(\varrho+n+1)}\right| \cdot \int_0^\infty \frac{e^{-t}\,t^x\,2^t}{|\varrho+t|}\,dt < C \cdot n^{-\Re \varrho},$$

wobei C eine von n unabhängige Konstante ist. Hieraus entfliesst jedoch unmittelbar $R_n \to 0$ für $n \to \infty$, wofern $\Re z > 0$, $\Re \varrho > 0$.

5. Reihen für die unvollständigen Gammafunktionen.

Differenziert man die Funktion $e^\sigma P(z, \varrho+\sigma)$ nach σ, so findet man mit Hilfe der Differenzengleichung der P-Funktion

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\left(e^\sigma P(z,\varrho+\sigma)\right)}{\partial\sigma} &= e^\sigma P(z,\varrho+\sigma) + e^{-\varrho}(\varrho+\sigma)^{z-1} \\ &= (z-1)\,e^\sigma\,P(z-1,\,\varrho+\sigma) \end{aligned}\right. \tag{51}$$

und darnach durch Induktion

$$\frac{\partial^n\left(e^\sigma P(z,\varrho+\sigma)\right)}{n!\,\partial\sigma^n} = \binom{z-1}{n} e^\sigma P(z-n,\,\varrho+\sigma). \tag{52}$$

Ist z keine positive oder negative ganze Zahl einschliesslich 0, so haben wir also

$$(53)\qquad P(z,\varrho+\sigma) = e^{-\sigma}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{z-1}{n}P(z-n,\varrho)\,\sigma^n$$

für $|\sigma| < |\varrho|$, indem $\sigma = \varrho$ der einzige singuläre Punkt von $P(z,\varrho+\sigma)$ als Funktion von σ im Endlichen ist. Für positiv ganzzahliges z gilt die Reihe sogar für alle σ.

Eine ähnliche Betrachtung liefert für die Q-Funktion

$$(54)\qquad Q(z,\varrho+\sigma) = e^{-\sigma}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{z-1}{n}Q(z-n,\varrho)\,\sigma^n,$$

und zwar bei $|\sigma| < |\varrho|$ für jedes z; ist z ganzzahlig (positiv, negativ oder 0), so konvergiert die Reihe sogar für alle σ.

Führt man in (54) die Identität

$$(55)\qquad \frac{Q(z-n,\varrho)}{\Gamma(z-n)} = \frac{Q(z,\varrho)}{\Gamma(z)} - e^{-\varrho}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\varrho^{z+s-n}}{\Gamma(z+s-n-1)}$$

ein, so gewinnt man nach einer einfachen Umrechnung

$$(56)\quad Q(z,\varrho+\sigma) = Q(z,\varrho) - e^{-\varrho-\sigma}\varrho^z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma^n}{n!}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(z-1)\cdots(z-s)}{\varrho^{s+1}},$$

woraus man durch Umkehrung der Summationsordnung die Formel

$$(57)\quad Q(z,\varrho+\sigma) = Q(z,\varrho) - e^{-\varrho}\varrho^z\sum_{s=0}^{\infty}\binom{z-1}{s}\frac{P(s+1,\sigma)}{\varrho^{s+1}}$$

herleiten kann, die man N. Nielsen[1] verdankt.

Für $z = 0$ stossen wir nach (54) und (56) auf die folgenden bemerkenswerten Entwicklungen für den Integrallogarithmus $li\,e^{-x} = -Q(0,x)$

[1] Integrallogarithmus, p. 84.

$$
(58)\quad \begin{cases} li\, e^{-x-y} = e^{-y} \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} Q(-n, x)\, y^n \\[1em] \qquad\quad = e^{-x-y} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{y^n}{n!} \sum\limits_{s=0}^{n-1} \dfrac{(-1)^s s!}{x^{s+1}}, \end{cases}
$$

während (57) die von Bessel[1] herrührende Reihe

$$
(59)\quad li\, e^{-x-y} - li\, e^{-x} = e^{-x} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{x^{s+1}} P(s+1, y)
$$

liefert.

[1] N. Nielsen l. c. p. 85.

Færdig fra Trykkeriet d. 30. Juni 1927.